

# Concurso Público do Instituto Federal de Sertão

## EBTT Física.

André V. Silva

[www.andrevsilva.com](http://www.andrevsilva.com)

Caderno de Questões

[Caderno de Questões IF Sertão 2025](#)

Sunday 7<sup>th</sup> September, 2025

### Contents

<b>1</b>	<b>Mecânica</b>	<b>3</b>
1.1	Questão 41 — Força mínima para iminência de movimento rampa acima . . .	3
1.2	Questão 42 — Cilindro com atrito . . . . .	5
1.3	Questão 43 - Trabalho de uma força de resistência . . . . .	8
1.4	Questão 44 - Pêndulo Físico . . . . .	13
1.5	Questão 45 - Colisão Unidimensional inelástica . . . . .	15
1.6	Questão 47 - Oscilações acopladas . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Gravitação</b>	<b>19</b>
2.1	Questão 46 - Balança de torção de Cavendish . . . . .	19
2.2	Questão 48 - Módulo da velocidade de um satélite orbitando a Terra . . . .	21
<b>3</b>	<b>Termodinâmica</b>	<b>23</b>
3.1	Questão 49 - Variação de Entropia Total . . . . .	23
3.2	Questão 50 - ciclo termodinâmico: gás de fótons . . . . .	24

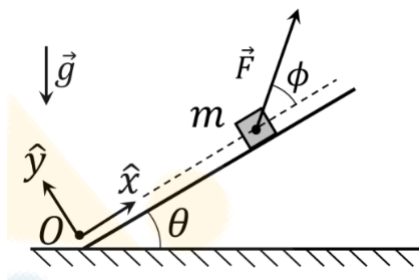
<b>4</b>	<b>Eletromagnetismo</b>	<b>26</b>
4.1	Questão 51 - Equações de Maxwell no Vácuo . . . . .	26
4.2	Questão 52 - Lei de Gauss para Eletricidade . . . . .	29
4.3	Questão 53 - Lei de Ampère . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Óptica Geométrica</b>	<b>34</b>
5.1	Questão 54 - Lente Convergente . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Interferência e Difração</b>	<b>35</b>
6.1	Questão 55 - Fibras Ópticas . . . . .	35
6.2	Questão 57 - Interferência da Luz . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Relatividade</b>	<b>38</b>
7.1	Questão 56 - Transformação de Lorentz . . . . .	38
7.2	Questão 58 - Energia-Momento Relativística . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Mecânica quântica em três dimensões e átomo de Hidrogênio</b>	<b>42</b>
8.1	Questão 59 - Modelo de Bohr para positrônio . . . . .	42
8.2	Questão 60 - Átomo de Hidrogênio . . . . .	43

---

## 1 Mecânica

### 1.1 Questão 41 — Força mínima para iminência de movimento rampa acima

Um bloco de massa  $m$  encontra-se em repouso sobre um plano inclinado de ângulo  $\theta$  com a horizontal. Uma força  $\vec{F}$  é aplicada ao bloco, formando ângulo  $\varphi$  com a direção do plano, como indicado na figura. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é  $\mu$ . Determine a intensidade mínima da força  $\vec{F}$  necessária para colocar o bloco na iminência de subir a rampa.



#### 1) Equilíbrio de forças

Projetando as forças ao longo dos eixos  $\hat{x}$  (paralelo à rampa, apontando para cima) e  $\hat{y}$  (normal ao plano):

$$F \cos \varphi - mg \sin \theta - \mu N = 0 \quad (1)$$

$$N - mg \cos \theta + F \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos \theta - F \sin \varphi \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$F \cos \varphi = mg \sin \theta + \mu (mg \cos \theta - F \sin \varphi). \quad (3)$$

#### 2) Expressão para a força aplicada

Da equação (3), resulta:

$$F(\varphi) = \frac{mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \varphi + \mu \sin \varphi}. \quad (4)$$

### 3) Maximização do denominador via Cauchy–Schwarz

O denominador pode ser escrito como produto escalar:

$$\cos \varphi + \mu \sin \varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot (1, \mu).$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz :

$$\boxed{\cos \varphi + \mu \sin \varphi \leq \sqrt{1 + \mu^2}.} \quad (5)$$

A igualdade em (5) ocorre quando

$$\tan \varphi^* = \mu, \quad (6)$$

isto é,

$$\cos \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad \sin \varphi^* = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

### 4) Força mínima

Substituindo o valor máximo do denominador (5) em (4), temos:

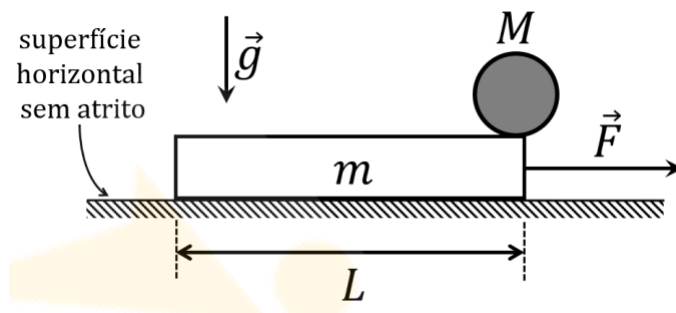
$$F_{\min} = \frac{mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (7)$$

Portanto, a força mínima aplicada que coloca o bloco na iminência de subir a rampa é dada por (7), atingida quando (6) vale.

**Alternativa correta: D.**

## 1.2 Questão 42 — Cilindro com atrito

Uma prancha de madeira, com comprimento  $L = 1,0$  m e massa  $m = 0,4$  kg, possui um cilindro maciço e homogêneo de aço, com massa  $M = 0,6$  kg, localizado na extremidade direita da prancha. O sistema está em repouso sobre um plano horizontal liso. Uma força constante  $\vec{F} = (20 \text{ N}) \hat{x}$  é aplicada à prancha, fazendo com que os objetos comecem a se mover acelerados. O cilindro rola suavemente, sem escorregar, sobre a prancha, devido à presença de atrito entre eles. Desprezando o atrito entre a prancha e a superfície horizontal, bem como qualquer força de resistência do ar, determine o intervalo de tempo, em segundos, que o cilindro levará para cair da prancha, ou seja, para atingir a extremidade oposta e deixar de estar em contato com ela.



- (A) 0,1 s
- (B) 0,2 s
- (C) 0,3 s
- (D) 0,4 s
- (E) 0,5 s

### 1) Definição das variáveis e forças

Seja  $a_p$  a aceleração da prancha (para a direita) e  $a_c$  a aceleração do centro do cilindro (para a direita), ambas medidas no referencial inercial do solo. Seja  $f$  a força de atrito

horizontal exercida pela prancha sobre o cilindro (no ponto de contato). Pela ação e reação, a prancha sofre  $-f$  da parte do cilindro.

Para o cilindro maciço homogêneo, momento de inércia em relação ao centro:

$$I = \frac{1}{2}MR^2. \quad (8)$$

Não precisamos do valor de  $R$  explicitamente, apenas das relações de rotação/translação.

## 2) Equações de movimento

Equilíbrio (segunda lei) para a prancha (força total horizontal):

$$F - f = ma_p. \quad (9)$$

Equação de translação para o cilindro:

$$f = Ma_c. \quad (10)$$

Equação de rotação para o cilindro (torque causado por  $f$ ):

$$fR = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha. \quad (11)$$

**Condição de rolamento sem escorregar entre cilindro e prancha: a velocidade do ponto de contato do cilindro iguala a velocidade da prancha.** Em termos das acelerações:

$$a_c - a_p = -R\alpha. \quad (12)$$

(A escolha do sinal garante consistência: se a prancha acelera mais que o cilindro, o contato induz uma rotação que satisfaz (12).)

## 3) Eliminação das incógnitas

Da (11) e de (12) obtemos:

$$fR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2}MR\alpha.$$

Usando (12)  $\alpha = -(a_c - a_p)/R$ , resulta

$$f = -\frac{1}{2}M(a_c - a_p). \quad (13)$$

Por outro lado, pela translação do cilindro (10):

$$f = Ma_c. \quad (14)$$

Igualando (13) e (14):

$$Ma_c = -\frac{1}{2}M(a_c - a_p).$$

Dividindo por  $M$  e rearranjando:

$$a_c = -\frac{1}{2}a_c + \frac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}a_c = \frac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{1}{3}a_p.$$

Substituindo (1.2) em (9) e usando (10) ( $f = Ma_c$ ):

$$F - Ma_c = ma_p.$$

Como  $a_c = a_p/3$ , obtemos

$$F - M\frac{a_p}{3} = ma_p \quad \Rightarrow \quad F = a_p\left(m + \frac{M}{3}\right).$$

Logo a aceleração da prancha:

$$a_p = \frac{F}{m + \frac{M}{3}} = \frac{3F}{3m + M}. \quad (15)$$

E, pela (1.2),

$$a_c = \frac{a_p}{3} = \frac{F}{3m + M}. \quad (16)$$

#### 4) Aceleração relativa e tempo até cair

A aceleração relativa entre prancha e cilindro (aceleração com que a prancha “afasta-se” do cilindro) é

$$a_{\text{rel}} = a_p - a_c = a_p - \frac{a_p}{3} = \frac{2}{3}a_p.$$

Usando (15):

$$a_{\text{rel}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3F}{3m + M} = \frac{2F}{3m + M}. \quad (17)$$

Inicialmente a velocidade relativa é zero (sistema parte do repouso). A distância relativa a percorrer para que o cilindro passe da extremidade direita até a esquerda da prancha é  $L$ . Para movimento uniformemente acelerado, o tempo  $t$  satisfaz  $L = \frac{1}{2}a_{\text{rel}}t^2$ , portanto

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{rel}}}} = \sqrt{\frac{2L(3m + M)}{2F}} = \sqrt{\frac{(3m + M)L}{F}}. \quad (18)$$

### 5) Substituição numérica

Dados:  $m = 0,4$  kg,  $M = 0,6$  kg,  $L = 1,0$  m,  $F = 20$  N.

Calcule  $3m + M$ :

$$3m + M = 3(0,4) + 0,6 = 1,2 + 0,6 = 1,8 \text{ kg}.$$

Substituindo em (18):

$$t = \sqrt{\frac{(3m + M)L}{F}} = \sqrt{\frac{1,8 \times 1,0}{20}} = \sqrt{\frac{1,8}{20}} = \sqrt{0,09} = 0,30 \text{ s}.$$

**Resposta:**  $t = 0,3$  s. (Alternativa C.)

---

### 1.3 Questão 43 - Trabalho de uma força de resistência

Um projétil de massa  $m$  é lançado verticalmente para cima a partir da posição  $z = 0$  com velocidade inicial  $\vec{v} = v_0\hat{z}$  ( $v_0 > 0$ ) no instante  $t = 0$ . Além da força gravitacional, atua sobre ele uma força de resistência do ar proporcional à velocidade:  $\vec{F} = -\beta m\vec{v}$ , onde  $\beta > 0$  é o parâmetro de amortecimento. A aceleração da gravidade é  $\vec{g} = -g\hat{z}$ . Determine o trabalho realizado pela força de resistência desde o lançamento até a altura máxima.

**Solução:**

A força de resistência é:

$$\vec{F}_r = -\beta m\vec{v} = -\beta mv\hat{z}.$$



O trabalho realizado pela força de resistência até a altura máxima é:

$$W_r = \int_0^{z_{\max}} \vec{F}_r \cdot d\vec{z} = -\beta m \int_0^{z_{\max}} v \, dz.$$

A equação do movimento é:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \beta m v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \beta v = -g.}$$

Solução da equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + \beta v = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \beta v$$

$$\frac{dv}{g + \beta v} = -dt$$

$$\int \frac{dv}{g + \beta v} = - \int dt$$

$$\frac{\ln(g + \beta v)}{\beta} = -t + C$$

Usando as condições de contorno do problema (quando  $t = 0$  e  $v = v_0$ ):

$$C = \frac{\ln(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{\ln(g + \beta v)}{\beta} = -t + \frac{\ln(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{\ln(g + \beta v)}{\beta} - \frac{\ln(g + \beta v_0)}{\beta} = -t$$

$$\ln(g + \beta v) - \ln(g + \beta v_0) = -\beta t$$

$$\ln \left[ \frac{(g + \beta v)}{(g + \beta v_0)} \right] = -\beta t$$

$$\frac{(g + \beta v)}{(g + \beta v_0)} = e^{-\beta t}$$

$$(g + \beta v) = (g + \beta v_0) e^{-\beta t}$$

$$\beta v = (g + \beta v_0) e^{-\beta t} - g$$

$$v(t) = \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}.$$

Altura máxima ocorre em  $t_{\max}$  tal que  $v(t_{\max}) = 0$ :

$$0 = \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t_{\max}} - \frac{g}{\beta} \Rightarrow e^{-\beta t_{\max}} = \frac{g/\beta}{v_0 + g/\beta} \Rightarrow t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right).$$

O trabalho da força de resistência:

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} v^2(t) dt = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[ \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \right]^2 dt.$$

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[ \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \right]^2 dt$$

$$\begin{aligned} W_r &= -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[ \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right)^2 e^{-2\beta t} - 2 \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right) \frac{g}{\beta} e^{-\beta t} + \left( \frac{g}{\beta} \right)^2 \right] dt \\ &= -\beta m \left[ \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right)^2 \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt - 2 \left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right) \frac{g}{\beta} \int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt + \left( \frac{g}{\beta} \right)^2 \int_0^{t_{\max}} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} dt &= t_{\max}. \end{aligned}$$

Integrando e substituindo  $t_{\max}$  e  $e^{-\beta t_{\max}}$ :

$$t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - e^{-2\beta \left( \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right)}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - e^{-\ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^{-2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2 - 1}{\left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{1 + \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} - 1}{\left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}}{\left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt = \frac{1 - e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta} = \frac{1}{2\beta} \frac{\left[ \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{\left( \frac{\beta}{g} \right)^2 \left( \frac{g}{\beta} + v_0 \right)^2}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt = \frac{g^2}{2\beta^3} \frac{\left[ \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{\left( v_0 + \frac{g}{\beta} \right)^2}. \quad \checkmark$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - e^{-\beta \left( \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - e^{\ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^{-1}}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)^{-1}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right) - 1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\frac{\beta}{g} \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)} = \frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta} = \frac{\frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}}{\beta} = \frac{v_0}{\beta \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{v_0}{\beta \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}. \quad \checkmark$$

$$W_r = -\beta m \left[ \left( \cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right)^2 \left[ \frac{g^2 \left[ \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{2\beta^3 \left( \cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right)^2} \right] - 2 \left( \cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right) \frac{g}{\beta} \frac{v_0}{\beta \left( \cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right)} + \left( \frac{g^2}{\beta^3} \right) \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

$$W_r = -\beta m \left[ \frac{g^2 \left[ \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{2\beta^3} - 2g \frac{v_0}{\beta} + \left( \frac{g^2}{\beta^3} \right) \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

$$W_r = - \left[ \frac{mg^2}{2\beta^2} \left[ \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right] - 2mg \frac{v_0}{\beta} + \left( \frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

$$W_r = - \left[ \frac{mgv_0}{\beta} + \frac{mv_0^2}{2} - 2mg \frac{v_0}{\beta} + \left( \frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

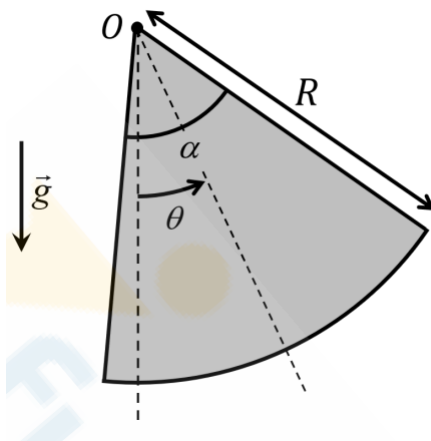
$$W_r = - \frac{mgv_0}{\beta} - \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2mgv_0}{\beta} - \left( \frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)$$

$$W_r = \frac{mgv_0}{\beta} - \left( \frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$W_r = \frac{mgv_0}{\beta} \left[ 1 - \left( \frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right] - \frac{mv_0^2}{2} \quad \blacksquare$$

#### 1.4 Questão 44 - Pêndulo Físico

Um pêndulo físico constituído por uma placa fina e homogênea em forma de um setor circular de raio  $R$  e ângulo central  $\alpha$ , está suspenso verticalmente no centro  $O$  do disco de origem. O pêndulo é deslocado por um ângulo  $\theta$  em relação à vertical e, em seguida, abandonado a partir do repouso para oscilar. A aceleração local da gravidade é  $g$  e possíveis atritos são desprezíveis. Assinale a alternativa que apresenta a expressão correta para a frequência angular  $\omega$  de pequenas oscilações do pêndulo físico.



- (A)  $\omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}}$
- (B)  $\omega = \sqrt{\frac{8g \cos(\alpha)}{3R \alpha}}$
- (C)  $\omega = \sqrt{\frac{8g \sin(\alpha/2)}{3R \alpha}}$
- (D)  $\omega = \sqrt{\frac{4g \sin(\alpha)}{3R \alpha}}$
- (E)  $\omega = \sqrt{\frac{4g \cos(\alpha/2)}{3R \alpha}}$

**Solução:**

Para pequenas oscilações linearizamos  $\sin \theta \approx \theta$  e usamos a equação do pêndulo físico:

$$I_O \ddot{\theta} + mgh \theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{I_O} \theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

onde  $I_O$  é o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão  $O$  (eixo perpendicular ao plano) e  $h$  é a distância do centro de massa ao ponto  $O$ .

**1) Massa e momento de inércia:**

Para uma placa homogênea em forma de setor, a densidade superficial  $\sigma$  satisfaz

$$m = \sigma \cdot \text{área} = \sigma \left( \frac{1}{2} \alpha R^2 \right).$$

O momento de inércia em relação a  $O$  (eixo perpendicular ao plano) é

$$I_O = \sigma \int_0^\alpha \int_0^R r^2 r dr d\phi = \sigma \frac{\alpha R^4}{4}.$$

Substituindo  $\sigma = \frac{2m}{\alpha R^2}$  obtemos

$$I_O = \frac{2m}{\alpha R^2} \cdot \frac{\alpha R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

**2) Centro de massa (distância radial  $h$  a partir de  $O$ ):**

O centro de massa de um setor circular encontra-se sobre a bissetriz e sua distância ao centro é

$$h = r_{CM} = \frac{4R \sin(\alpha/2)}{3\alpha}.$$

**3) Frequência angular:**

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mg \frac{4R \sin(\alpha/2)}{3\alpha}}{\frac{mR^2}{2}}} = \sqrt{\frac{8g \sin(\alpha/2)}{3R\alpha}}.$$

Portanto, a alternativa correta é **(C)**.

### 1.5 Questão 45 - Colisão Unidimensional inelástica

Considere uma partícula de massa  $m$ , que se move com velocidade  $v_0$ , e realiza uma colisão unidimensional inelástica com outra partícula de massa  $M$ , inicialmente em repouso. O coeficiente de restituição do material constituinte das partículas é denotado por  $\varepsilon$ . Considerando que a razão das massas das partículas é  $M/m = \lambda$ , analise as assertivas abaixo:

- I. A velocidade da partícula de massa  $m$  após a colisão é  $v = v_0(1 - \varepsilon\lambda)/(1 + \lambda)$ .
- II. A velocidade da partícula de massa  $M$  após a colisão é  $V = v_0(1 + \varepsilon)/(1 + \lambda)$ .
- III. A razão entre a energia cinética adquirida pela partícula de massa  $M$  e a energia cinética inicial da partícula de massa  $m$  é  $\lambda(\varepsilon + 1)/(\lambda + 1)$ .

Quais estão corretas?

- (A) Apenas I.
- (B) Apenas II.
- (C) Apenas III.
- (D) Apenas I e II.
- (E) I, II e III.

### Solução:

Pela conservação do momento e definição do coeficiente de restituição:

$$mv_0 = mv + MV, \quad V - v = \varepsilon(v_0 - 0) = \varepsilon v_0.$$

Da segunda equação temos  $V = v + \varepsilon v_0$ . Substituindo na conservação do momento:

$$mv_0 = mv + M(v + \varepsilon v_0) = (m + M)v + M\varepsilon v_0.$$

Isolando  $v$ :

$$(m + M)v = v_0(m - M\varepsilon) \Rightarrow v = v_0 \frac{m - M\varepsilon}{m + M} = v_0 \frac{1 - \lambda\varepsilon}{1 + \lambda},$$

o que confirma a assertiva **I**.

Agora  $V = v + \varepsilon v_0$ :

$$V = v_0 \frac{1 - \lambda\varepsilon}{1 + \lambda} + \varepsilon v_0 = v_0 \frac{1 - \lambda\varepsilon + \varepsilon(1 + \lambda)}{1 + \lambda} = v_0 \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda},$$

confirmando a assertiva **II**.

Para a assertiva **III**, calculemos a razão das energias:

$$\frac{K_M}{K_{m, \text{inicial}}} = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{M}{m} \left( \frac{V}{v_0} \right)^2 = \lambda \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} \right)^2 = \frac{\lambda(1 + \varepsilon)^2}{(1 + \lambda)^2},$$

que **não** coincide com  $\frac{\lambda(1 + \varepsilon)}{1 + \lambda}$  (a dada na III). Portanto a assertiva **III** é falsa.

Assim, estão corretas apenas I e II.

A resposta correta é alternativa **(D)**.

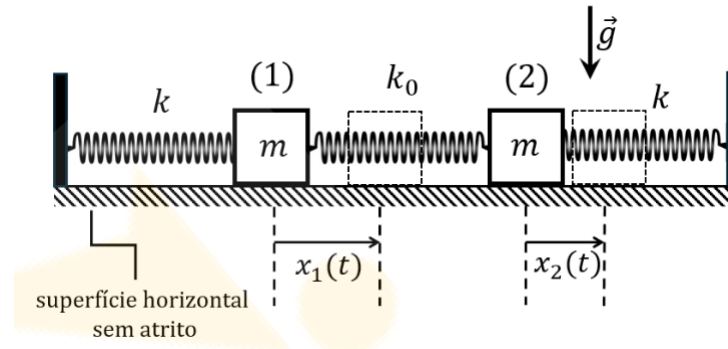
## 1.6 Questão 47 - Oscilações acopladas

Dois blocos (1 e 2) de massas iguais a  $m = 0,5 \text{ kg}$  são conectados a três molas que estão posicionadas entre duas paredes, conforme ilustrado na figura abaixo. A constante elástica das duas molas externas é  $k = 2,0 \text{ N/m}$ , e a constante elástica da mola do meio  $k_0 = 8,0 \text{ N/m}$ . As molas têm massa desprezível e satisfazem à lei de Hooke. Sabe-se também que quando os blocos se encontram simultaneamente em suas respectivas posições de equilíbrio, as molas não apresentam qualquer deformação. Considere que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  denotam os deslocamentos dos blocos da esquerda e da direita, respectivamente, em relação às suas posições de equilíbrio. No instante inicial  $t = 0$ , ambos os blocos 1 e 2 são soltos a partir do repouso nas posições  $x_1(0) = 10 \text{ cm}$  e  $x_2(0) = 0$ , respectivamente. Assinale a alternativa que representa a posição dos blocos como função do tempo medido em unidades do sistema internacional.

(A)  $x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(6t)] \text{ m}$ ,  $x_2(t) = 0,05[\cos(2t) - \cos(6t)] \text{ m}$

(B)  $x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(4t)] \text{ m}$ ,  $x_2(t) = 0,05[\cos(4t) - \cos(2t)] \text{ m}$





(C)  $x_1(t) = 0,05 \cos(3t) \cos(t) \text{ m}$ ,  $x_2(t) = 0,05 \sin(3t) \sin(t) \text{ m}$

(D)  $x_1(t) = 0,10 \cos(4t) \text{ m}$ ,  $x_2(t) = 0,10 \sin(2t) \text{ m}$

(E)  $x_1(t) = 0,10 \cos(2t) \text{ m}$ ,  $x_2(t) = 0,10 \sin(4t) \text{ m}$

### Solução:

1) **Equações de movimento:** Para o bloco 1:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_0(x_1 - x_2).$$

Para o bloco 2:

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_0(x_2 - x_1).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k+k_0}{m}x_1 - \frac{k_0}{m}x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{k+k_0}{m}x_2 - \frac{k_0}{m}x_1 = 0. \end{cases}$$

2) **Matriz do sistema:**

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{m} \begin{bmatrix} k+k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k+k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Com  $m = 0,5$ ,  $k = 2$  e  $k_0 = 8$ :

$$A = \frac{1}{0,5} \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -16 \\ -16 & 20 \end{bmatrix}.$$

3) **Autovalores (modos normais):**

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (20 - \lambda)^2 - (-16)^2 = 0,$$

$$(20 - \lambda)^2 - 256 = 0, \Rightarrow 20 - \lambda = \pm 16.$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 36.$$

Logo, as frequências são:

$$\omega_1 = \sqrt{4} = 2, \quad \omega_2 = \sqrt{36} = 6.$$

4) **Autovetores:** Para  $\lambda_1 = 4$ :

$$(20 - 4)x_1 - 16x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Para  $\lambda_2 = 36$ :

$$(20 - 36)x_1 - 16x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

**Modos normais:**

$$\begin{cases} \text{Modo 1 (freq. 2 rad/s): } x_1 = x_2, \\ \text{Modo 2 (freq. 6 rad/s): } x_1 = -x_2. \end{cases}$$

5) **Combinação linear:** Solução geral:

$$x_1(t) = A \cos(2t) + B \cos(6t), \quad x_2(t) = A \cos(2t) - B \cos(6t).$$

6) **Condições iniciais:** No instante  $t = 0$ :

$$x_1(0) = A + B = 0,10, \quad x_2(0) = A - B = 0.$$

$$A = B = 0,05.$$

7) **Solução final:**

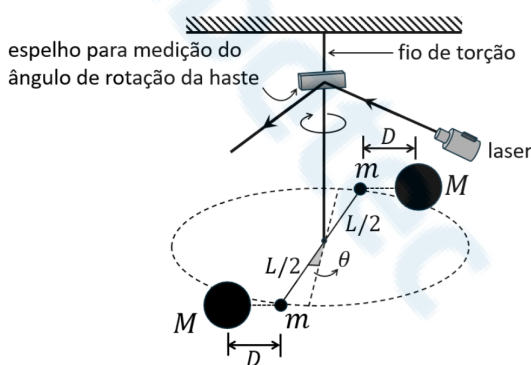
$$x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(6t)] \text{ m}, \quad x_2(t) = 0,05[\cos(2t) - \cos(6t)] \text{ m}.$$

A resposta correta é a alternativa **(A)**.

## 2 Gravitação

### 2.1 Questão 46 - Balança de torção de Cavendish

No experimento de Henry Cavendish, de 1797, foi utilizada uma balança de torção para determinar o valor da constante gravitacional  $G$  da lei da gravitação universal de Newton. Considere uma balança de torção composta por uma barra de massa desprezível e comprimento  $L$ , suspensa horizontalmente pelo seu centro por um fio de torção vertical. Duas pequenas esferas de massa igual a  $m$  estão presas em cada extremidade da barra. No primeiro passo do experimento, observa-se que, quando a barra é girada com um pequeno ângulo, torcendo o fio, e depois solta, o pêndulo de torção resultante sofre movimento harmônico simples com um período  $T$ . Em seguida, após o pêndulo ser parado e estar em sua posição de equilíbrio, um par de esferas grandes de massa igual a  $M$  são colocadas em lados opostos da barra, cada uma próxima a uma das massas  $m$ . Devido à atração gravitacional apenas entre cada par de massas, a barra é observada girando por um pequeno ângulo  $\theta$  e depois parar nessa posição, com cada massa  $M$  a uma distância  $D$  da massa  $m$  correspondente. Determine uma expressão para  $G$  em termos das variáveis dadas no problema.



(A)  $G = \frac{\pi^2 D^2 L^2 \theta}{MT^2}$

(B)  $G = \frac{2\pi^2 D^2 L \theta}{MT^2}$

(C)  $G = \frac{4\pi^2 D^2 L^2 \theta}{MT^2}$

$$(D) \quad G = \frac{\pi^2 D^2 L \theta}{m T^2}$$

$$(E) \quad G = \frac{\pi^2 D^2 L \theta}{4m T^2}$$

### Solução:

1) **Constante de torção via o período.** Para pequenas oscilações, o pêndulo de torção satisfaz

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}}.$$

A barra é desprezível e há duas massas  $m$  a  $L/2$  do eixo, logo

$$I = 2m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2} \Rightarrow \kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{mL^2}{2} = \frac{2\pi^2 mL^2}{T^2}.$$

2) **Equilíbrio com as massas  $M$ .** A força gravitacional entre  $M$  e  $m$  é

$$F = \frac{GmM}{D^2}.$$

Cada força produz um torque de módulo  $F \cdot (L/2)$  em torno do centro; são duas forças simétricas, portanto o torque gravitacional total vale

$$\tau_g = 2F \left(\frac{L}{2}\right) = FL.$$

No novo equilíbrio, o torque elástico do fio  $\tau_\kappa = \kappa \theta$  (para pequeno  $\theta$ ) equilibra o torque gravitacional:

$$\kappa \theta = FL = \frac{GmM}{D^2} L.$$

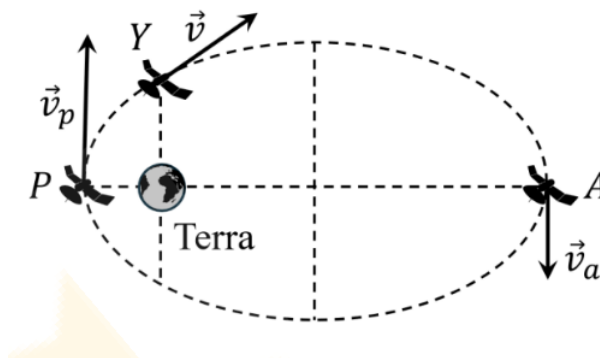
3) **Isolando  $G$ .** Substituindo  $\kappa$ :

$$\frac{2\pi^2 mL^2}{T^2} \theta = \frac{GmM}{D^2} L \Rightarrow \boxed{G = \frac{2\pi^2 D^2 L \theta}{MT^2}}.$$

A resposta correta é a alternativa **(B)**.

## 2.2 Questão 48 - Módulo da velocidade de um satélite orbitando a Terra

Um satélite artificial orbita a Terra em uma trajetória elíptica sob efeito apenas da força gravitacional. O satélite passa pelo perigeu  $P$  (ponto mais próximo à Terra) com velocidade  $\vec{v}_p$  e pelo apogeu  $A$  (ponto mais afastado da Terra) com velocidade  $\vec{v}_a$ . A velocidade do satélite em um ponto  $Y$ , localizado na linha que passa pela Terra e perpendicular ao eixo maior da elipse, é denotada por  $\vec{v}$ . É correto afirmar que o módulo da velocidade  $v$  no ponto  $Y$ , em termos de  $v_p$  e  $v_a$ , é expresso por:



- (A)  $v = \frac{v_a + v_p}{2}$
- (B)  $v = \frac{2v_a v_p}{v_a + v_p}$
- (C)  $v = \sqrt{v_a v_p}$
- (D)  $v = \sqrt{\frac{v_a^2 + v_p^2}{2}}$
- (E)  $v = \sqrt{\frac{2v_a^2 v_p^2}{v_a^2 + v_p^2}}$

### Solução:

Considerando a órbita elíptica com foco na Terra, usemos a equação de *vis-viva* e a conservação do momento angular. Denotando por  $\mu = GM$ ,

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

onde  $r$  é a distância ao foco (Terra) no ponto considerado e  $a$  é o semieixo maior. Para o

perigeu ( $r_p$ ) e apogeu ( $r_a$ ) temos

$$v_p^2 = \mu \left( \frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right), \quad (19)$$

$$v_a^2 = \mu \left( \frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right). \quad (20)$$

Subtraindo (20) de (19) obtemos

$$v_p^2 - v_a^2 = 2\mu \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right) \Rightarrow \mu = \frac{v_p^2 - v_a^2}{2 \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right)}.$$

O ponto  $Y$  corresponde ao ângulo verdadeiro  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , portanto

$$r_Y = \frac{a(1 - e^2)}{1 + 0} = a(1 - e^2).$$

Usando a relação entre os raios de perigeu/apogeu e  $a$  (isto é,  $r_p = a(1 - e)$  e  $r_a = a(1 + e)$ ) obtemos

$$\frac{1}{r_Y} = \frac{a}{r_p r_a} = \frac{r_p + r_a}{2r_p r_a}.$$

Agora escrevemos a velocidade em  $Y$  via vis-viva (usando a expressão em  $r_p$  e eliminando  $1/a$ ):

$$v_Y^2 = v_p^2 + 2\mu \left( \frac{1}{r_Y} - \frac{1}{r_p} \right).$$

Substituindo  $\mu$  e  $\frac{1}{r_Y} - \frac{1}{r_p} = \frac{r_p - r_a}{2r_p r_a}$  temos

$$v_Y^2 = v_p^2 + (v_p^2 - v_a^2) \frac{r_p r_a}{r_a - r_p} \cdot \frac{r_p - r_a}{2r_p r_a} = v_p^2 - \frac{1}{2}(v_p^2 - v_a^2).$$

Portanto

$$v_Y^2 = \frac{v_p^2 + v_a^2}{2},$$

e

$$v_Y = \sqrt{\frac{v_p^2 + v_a^2}{2}}.$$

**Resposta:** alternativa **D**.

### 3 Termodinâmica

#### 3.1 Questão 49 - Variação de Entropia Total

Em um recipiente de capacidade térmica desprezível e termicamente isolado, uma quantidade de água de massa  $m_A = 80$  g encontra-se inicialmente à temperatura  $T_A = 60^\circ\text{C}$ . Um cubo de gelo com massa  $m_B = 20$  g a  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  é introduzido no interior do recipiente. Sabe-se que o calor específico da água é  $c = 1.0 \text{ cal g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e o calor latente de fusão do gelo a  $0^\circ\text{C}$  é  $L = 80 \text{ cal g}^{-1}$ . Qual é a variação de entropia total do sistema ao atingir o equilíbrio térmico, em unidades de  $\text{cal} \cdot \text{K}^{-1}$ ?

- (A)  $20 \ln\left(\frac{305}{273}\right) - 80 \ln\left(\frac{333}{305}\right)$
- (B)  $20 \ln\left(\frac{321}{273}\right) - 80 \ln\left(\frac{333}{321}\right)$
- (C)  $\frac{8000}{273} + 100 \ln\left(\frac{323}{273}\right) - 100 \ln\left(\frac{373}{323}\right)$
- (D)  $\frac{1600}{273} + 20 \ln\left(\frac{321}{273}\right) - 80 \ln\left(\frac{333}{321}\right)$
- (E)  $\frac{1600}{273} + 20 \ln\left(\frac{305}{273}\right) - 80 \ln\left(\frac{333}{305}\right)$

#### **Solução:**

Calculemos a temperatura de equilíbrio  $T_f$  pelo balanço de energia:

$$m_A c (60 - T_f) = m_B L + m_B c (T_f - 0).$$

Substituindo  $m_A = 80$ ,  $m_B = 20$ ,  $c = 1$ ,  $L = 80$ :

$$80(60 - T_f) = 20 \cdot 80 + 20T_f \quad \Rightarrow \quad 4800 - 80T_f = 1600 + 20T_f$$

$$\Rightarrow 100T_f = 3200 \Rightarrow T_f = 32^\circ\text{C}.$$

Usando temperaturas absolutas  $T_K = T(^{\circ}\text{C}) + 273$ :

- Água: de 333 K a 305 K

$$\Delta S_{\text{água}} = m_A c \ln\left(\frac{305}{333}\right) = 80 \ln\left(\frac{305}{333}\right).$$

- Gelo (fusão a 273 K + aquecimento de 273 a 305 K):

$$\Delta S_{\text{fusão}} = \frac{m_B L}{273} = \frac{20 \cdot 80}{273} = \frac{1600}{273},$$

$$\Delta S_{\text{aquec}} = m_B c \ln\left(\frac{305}{273}\right) = 20 \ln\left(\frac{305}{273}\right).$$

Somando todas as contribuições:

$$\Delta S_{\text{total}} = \frac{1600}{273} + 20 \ln\left(\frac{305}{273}\right) + 80 \ln\left(\frac{305}{333}\right).$$

Reescrevendo o último termo com sinal negativo:

$$\Delta S_{\text{total}} = \frac{1600}{273} + 20 \ln\left(\frac{305}{273}\right) - 80 \ln\left(\frac{333}{305}\right).$$

A resposta correta é alternativa **(E)**.

### 3.2 Questão 50 - ciclo termodinâmico: gás de fótons

Processos termodinâmicos podem ser estendidos a partículas relativísticas, como um gás de fótons. Considere uma radiação eletromagnética inicialmente confinada em uma cavidade de volume  $V$ , a qual está em equilíbrio térmico com as paredes da cavidade a uma temperatura  $T$ . Essa radiação se comporta como um gás de fótons, cuja energia interna é dada por

$$U = \frac{4\sigma}{c} VT^4,$$

onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. A pressão  $P$  do gás de fótons é um terço da densidade volumétrica de energia  $u = U/V$ , ou seja:

$$P = \frac{4\sigma}{3c} T^4.$$

Esse gás de fótons é utilizado como substância de trabalho em um ciclo termodinâmico ( $ABCD$ ), composto por dois processos isobáricos e dois processos isocóricos, conforme ilustrado no diagrama  $P$  vs.  $V$  fornecido (retângulo com vértices  $A(V_0, P_0)$ ,  $B(V_0, 2P_0)$ ,  $C(2V_0, 2P_0)$ ,  $D(2V_0, P_0)$ ). Calcule a eficiência  $\eta$  do ciclo para o gás de fótons.



(A)  $\eta = 9,0\%$

(B)  $\eta = 12,5\%$

(C)  $\eta = 14,3\%$

(D)  $\eta = 15,4\%$

(E)  $\eta = 25\%$

**Solução:**

Para o gás de fótons temos  $U = \frac{4\sigma}{c}VT^4$  e  $P = \frac{4\sigma}{3c}T^4$ . Eliminando  $T^4$ :

$$T^4 = \frac{3P}{a} \quad \text{com } a = \frac{4\sigma}{c},$$

e

$$U = aVT^4 = aV\frac{3P}{a} = 3PV.$$

Logo  $U = 3PV$ .

Calculemos  $U$  em cada vértice (em unidades de  $P_0V_0$ ):

$$U_A = 3P_0V_0, \quad U_B = 3(2P_0)V_0 = 6P_0V_0,$$

$$U_C = 3(2P_0)(2V_0) = 12P_0V_0, \quad U_D = 3P_0(2V_0) = 6P_0V_0.$$

Trabalho líquido do ciclo  $W_{\text{lq}}$  é a área do retângulo:

$$W_{\text{lq}} = (2P_0 - P_0)(2V_0 - V_0) = P_0V_0.$$

Agora os calores absorvidos (processos com  $Q > 0$ ):

1.  $A \rightarrow B$  (isocórico):  $W_{AB} = 0$ ,  $\Delta U_{AB} = U_B - U_A = 6P_0V_0 - 3P_0V_0 = 3P_0V_0$ . Assim  $Q_{AB} = 3P_0V_0$ .

2.  $B \rightarrow C$  (isobárico a  $P = 2P_0$ ):  $\Delta U_{BC} = U_C - U_B = 12P_0V_0 - 6P_0V_0 = 6P_0V_0$ .

Trabalho  $W_{BC} = P\Delta V = 2P_0(2V_0 - V_0) = 2P_0V_0$ . Logo

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = 6P_0V_0 + 2P_0V_0 = 8P_0V_0.$$

Os outros processos  $C \rightarrow D$  e  $D \rightarrow A$  liberam calor ( $Q < 0$ ), portanto o calor total absorvido é

$$Q_{\text{in}} = Q_{AB} + Q_{BC} = 3P_0V_0 + 8P_0V_0 = 11P_0V_0.$$

Portanto a eficiência do ciclo é

$$\eta = \frac{W_{\text{liq}}}{Q_{\text{in}}} = \frac{P_0V_0}{11P_0V_0} = \frac{1}{11} \approx 0,0909 \equiv 9,09\%.$$

A resposta correta é alternativa **(A)  $\eta = 9,0\%$** .

## 4 Eletromagnetismo

### 4.1 Questão 51 - Equações de Maxwell no Vácuo

No artigo intitulado “*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*”, de 1865, James Clerk Maxwell formulou inicialmente 20 equações para descrever os campos elétricos e magnéticos na natureza. Foram Oliver Heaviside e Heinrich Hertz que, duas décadas após a morte de Maxwell, as simplificaram em quatro, conhecidas hoje como: Lei de Gauss para eletricidade, Lei de Gauss para magnetismo, Lei de Faraday e Lei de Ampère-Maxwell. Essas equações relacionam os vetores campo elétrico e campo magnético e suas fontes, como cargas elétricas e correntes. Considerando as quatro equações de Maxwell, é possível demonstrar que campos elétricos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e magnéticos  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  dependentes do espaço e tempo, no espaço vazio, satisfazem equações de onda, cuja velocidade de propagação é dada por  $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ , onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente. Sobre esse conjunto de equações, assinale a alternativa **INCORRETA**.

- (A) A lei de Gauss para eletricidade estabelece que cargas elétricas estacionárias produzem um campo elétrico, e o fluxo desse campo, ao passar por qualquer superfície fechada, é proporcional à carga total contida nessa superfície.
- (B) A lei de Gauss para o magnetismo estabelece que o fluxo magnético total que passa por qualquer superfície fechada é zero. Do ponto de vista experimental, esta equação descreve que as linhas de força do campo magnético não convergem nem divergem de nenhum ponto no espaço, o que implica diretamente na ausência de

polos magnéticos isolados (monopolos magnéticos) na natureza.

- (C) A lei da indução eletromagnética, descoberta por Michael Faraday em 1831, em uma série de experimentos, afirma que a integral de linha do campo elétrico em torno de uma curva fechada  $C$  é igual ao negativo da taxa de variação temporal do fluxo magnético através de qualquer superfície  $S$  limitada pela curva  $C$ .
- (D) A lei de Ampère-Maxwell afirma que a integral de linha do campo magnético em torno de qualquer curva fechada  $C$  é proporcional à soma da corrente elétrica de condução e da corrente de deslocamento através da superfície  $S$  limitada pela curva  $C$ .
- (E) As equações de onda do campo elétrico e magnético são invariantes por transformação de Galileu entre as coordenadas espaço-tempo de dois referenciais inerciais.

### Solução:

A resposta correta é alternativa **(E)**.

### Explicação detalhada (alternativa a alternativa):

#### (A) — Correta.

Forma integral da Lei de Gauss (eletricidade):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

e forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Isto significa exatamente que o fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície fechada é proporcional à carga total contida no volume delimitado por essa superfície. A alternativa A descreve corretamente a lei.

#### (B) — Correta.

Lei de Gauss para o magnetismo (integral):

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

e diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Isso expressa que não há "fontes" ou "sumidouros" para  $\mathbf{B}$ : as linhas de campo magnético são contínuas (laços fechados) e não existem monopolos magnéticos observados. A descrição da alternativa B está correta.

**(C) — Correta.**

Lei de Faraday (forma integral):

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A},$$

ou diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Isto corresponde exatamente ao enunciado: a força eletromotriz ao longo de uma curva fechada é o negativo da variação temporal do fluxo magnético pela superfície limitada.

A alternativa C está correta.

**(D) — Correta.**

Lei de Ampère-Maxwell (integral):

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A},$$

ou diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

A inclusão do termo  $\mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  (corrente de deslocamento) foi essencial para a consistência matemática e física das equações e para permitir equações de onda para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . A alternativa D está correta.

**(E) — Incorreta (explicação detalhada).**

As equações de Maxwell no vácuo levam às equações de onda para os campos elétrico e magnético, por exemplo (forma escalar 1D para ilustrar):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Essas equações de onda *não* são invariantes sob transformações de Galileu. A transformação galileana entre dois referenciais que se movem com velocidade  $v$  (no eixo  $x$ ) é

$$x' = x - vt, \quad t' = t.$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'}.$$

Logo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}.$$

Substituindo na equação de onda obtemos termos mistos  $\partial^2/(\partial t' \partial x')$  e um coeficiente diferente no termo  $\partial^2/\partial x'^2$ ; o operador da onda não preserva sua forma original salvo nos casos triviais  $v = 0$  ou  $c \rightarrow \infty$ . Escrevendo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \neq \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

Portanto a equação de onda muda de forma sob a transformação galileana — não é invariante.

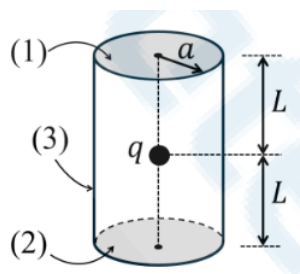
Fisicamente, isso reflete que Maxwell prediz uma velocidade de propagação  $c$  da luz que é a mesma em todos os referenciais inerciais — este fato é incompatível com a adição simples de velocidades postulada pela transformação de Galileu. A resolução histórica dessa contradição levou às transformações de Lorentz e à teoria da relatividade restrita de Einstein: as equações de Maxwell são invariantes sob transformações de Lorentz, não sob Galileu. Assim a alternativa E está errada.

**Conclusão:** a única alternativa *incorreta* é a E porque as equações de onda (e, em geral, as equações de Maxwell) não são invariantes sob transformações galileanas — elas exigem invariância de Lorentz.

## 4.2 Questão 52 - Lei de Gauss para Eletricidade

Uma carga elétrica pontual  $q > 0$  se encontra no centro geométrico de uma superfície gaussiana cilíndrica de altura  $2L$  e raio  $a$ . Sabendo que  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica do meio em todo o espaço e que as grandezas são expressas no sistema internacional de

unidades, analise as assertivas abaixo:



I. O fluxo total do vetor campo elétrico na superfície gaussiana cilíndrica é dado por

$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0 RL}.$$

II. Os fluxos elétricos do vetor campo elétrico através de cada uma das superfícies circulares superior ( $\phi_1$ ) e inferior ( $\phi_2$ ) do cilindro são dados por:

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{q}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right).$$

III. O fluxo elétrico  $\phi_3$  através da superfície lateral do cilindro é dado por:

$$\phi_3 = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{a}{\sqrt{L^2 + a^2}}.$$

Quais estão corretas?

- (A) Apenas I.
- (B) Apenas II.
- (C) Apenas III.
- (D) Apenas II e III.
- (E) I, II e III.

### Solução:

Analisemos cada item.

**Total de fluxo (verificação de I).** Por Teorema de Gauss, o fluxo elétrico total através de uma superfície fechada que envolve a carga pontual  $q$  é

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

A expressão dada em I,  $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 RL}$ , não tem dimensão nem forma compatível com  $q/\epsilon_0$ . Portanto **I é falsa**.

**Fluxo através de uma tampa circular (verificação de II).** Considere a tampa circular superior: a carga está no eixo, à distância  $L$  do plano da tampa, e a tampa tem raio  $a$ . A semi-ângulo sólido  $\theta$  que a tampa subtende satisfaz  $\cos \theta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$ . O ângulo sólido  $\Omega$  subtendido pela tampa (vista da carga) é

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}\right).$$

O fluxo através da tampa é a fração  $\Omega/(4\pi)$  do fluxo total  $q/\epsilon_0$ :

$$\phi_1 = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}\right)}{4\pi} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}\right).$$

Como a tampa inferior é simétrica,  $\phi_2 = \phi_1$ . Logo a expressão em II está correta; **II é verdadeira**.

$$\boxed{\phi_1 = \phi_2 = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}\right)}.$$

**Fluxo através da superfície lateral (verificação de III).** O fluxo lateral  $\phi_3$  é o fluxo total menos o fluxo pelas duas tampas:

$$\phi_3 = \Phi_{\text{total}} - 2\phi_1 = \frac{q}{\epsilon_0} - 2 \cdot \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}\right) = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}.$$

$$\boxed{\phi_3 = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}}$$

Portanto o valor correto é  $\phi_3 = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$ , não o dado em III (que tem  $a$  no numerador). Assim **III é falsa**.

Conclusão: apenas a assertiva II está correta.

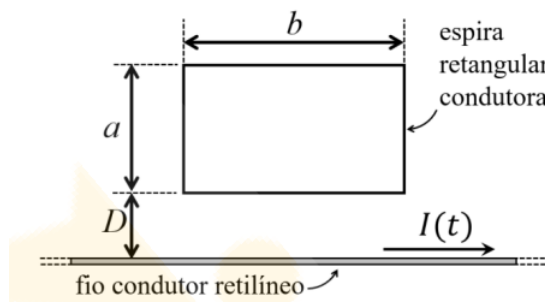
A resposta correta é alternativa **(B) Apenas II**.

### 4.3 Questão 53 - Lei de Ampère

Uma espira retangular com lados  $a$  e  $b$  encontra-se situada no mesmo plano, a uma distância  $D$  de um fio retilíneo muito longo, conforme a figura. Sabe-se que no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq T$  o fio conduz uma corrente elétrica que varia linearmente com o tempo de acordo com a função

$$I(t) = I_0 \left( 1 - \frac{t}{T} \right),$$

onde  $I_0$  representa a intensidade da corrente no instante de  $t = 0$ . A constante de permeabilidade magnética do meio é  $\mu_0$ , e o fio e a espira retangular estão fixos em suas posições. Desconsiderando os efeitos de autoindutância, determine o módulo da força eletromotriz induzida  $\mathcal{E}(t)$  na espira retangular para o intervalo de tempo  $0 \leq t \leq T$ .



- (A)  $|\mathcal{E}(t)| = \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi DT}$
- (B)  $|\mathcal{E}(t)| = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi T} \ln \left( 1 + \frac{a}{D} \right)$
- (C)  $|\mathcal{E}(t)| = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi T} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+D} \right)$
- (D)  $|\mathcal{E}(t)| = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \ln \left( 1 + \frac{a}{D} \right)$
- (E)  $|\mathcal{E}(t)| = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+D} \right)$

### Resolução

O fluxo magnético  $\Phi_B$  através da espira devido ao fio retilíneo é dado por:

$$\Phi_B(t) = \int_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$



O campo magnético de um fio retilíneo infinito é:

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r},$$

onde  $r$  é a distância perpendicular ao fio.

Para uma espira retangular, integramos ao longo da direção  $a$  (altura da espira):

$$\Phi_B(t) = \int_D^{D+a} B(r, t) b \, dr = b \int_D^{D+a} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \, dr = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \int_D^{D+a} \frac{dr}{r}.$$

O resultado da integral:

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \ln \left( \frac{D+a}{D} \right) = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{D} \right).$$

A força eletromotriz induzida na espira é dada pela lei de Faraday:

$$\mathcal{E}(t) = \left| -\frac{d\Phi_B(t)}{dt} \right| = \left| -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{D} \right) \frac{dI(t)}{dt} \right|.$$

Como  $I(t) = I_0 \left( 1 - \frac{t}{T} \right)$ , temos:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{I_0}{T}.$$

Substituindo na expressão da FEM:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi T} \ln \left( 1 + \frac{a}{D} \right).$$

## Conclusão

O módulo da força eletromotriz induzida na espira retangular é constante e dado por:

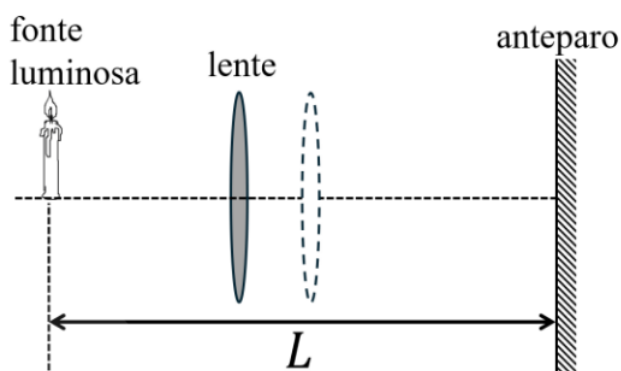
$$\boxed{\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi T} \ln \left( 1 + \frac{a}{D} \right)}.$$

Portanto, a alternativa correta é **B**.

## 5 Óptica Geométrica

### 5.1 Questão 54 - Lente Convergente

Uma lente delgada convergente de distância focal  $f$  é colocada entre uma fonte luminosa e um anteparo, que estão fixos e separados por uma distância  $L$ , com  $L \geq 4f$ . Qual é a expressão para a distância entre as duas posições da lente que formarão imagens reais nítidas da fonte sobre o anteparo?



- (A)  $L/2$
- (B)  $\sqrt{L^2 + 2fL}$
- (C)  $\sqrt{L^2 + 4fL}$
- (D)  $\sqrt{L^2 - 2fL}$
- (E)  $\sqrt{L^2 - 4fL}$

#### Solução:

Seja  $p$  a distância objeto-lente (da fonte até a lente) e  $q$  a distância lente-imagem (da lente até o anteparo). Como fonte e anteparo estão separados por  $L$  e a lente fica entre eles, temos

$$p + q = L.$$

A equação da lente delgada é

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Substituindo  $q = L - p$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{L - p} = \frac{L}{p(L - p)}.$$

Multiplicando ambos os lados por  $p(L - p)$ :

$$p(L - p) = fL.$$

Isso resulta na equação quadrática

$$p^2 - Lp + fL = 0.$$

As raízes desta equação (as duas posições possíveis da lente que formam imagem nítida no anteparo) são

$$p_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4fL}}{2}.$$

A distância entre as duas posições da lente é

$$\Delta p = |p_1 - p_2| = \sqrt{L^2 - 4fL}.$$

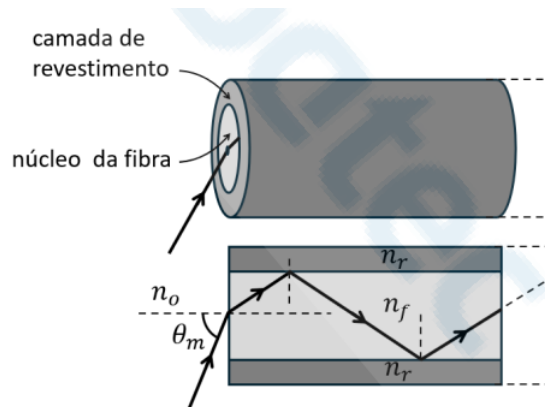
Portanto a alternativa correta é a **(E)**.

## 6 Interferência e Difração

### 6.1 Questão 55 - Fibras Ópticas

O uso das fibras ópticas é uma das principais aplicações tecnológicas da óptica na área de comunicações. Fibras cilíndricas finas de vidro ou plástico podem ser usadas para transmitir sinais ao invés de fios metálicos. A grande vantagem está na largura de banda disponível quando o portador são ondas eletromagnéticas. Isso permite que uma fibra carregue muito mais sinais independentes diferentes do que um fio condutor. Existem também vantagens em termos de peso e independência de recursos limitados. Considere uma fibra óptica composta por um núcleo de vidro fino com índice de refração  $n_f$ , cercado por uma camada de revestimento de menor densidade com índice de refração  $n_r < n_f$ . O índice de refração do ar é denotado por  $n_0$ . Assinale a alternativa que expressa corretamente o ângulo de incidência máximo ( $\theta_m$ ) que qualquer raio que incida

na face de entrada seja guiado dentro da fibra por reflexões internas totais sucessivas.



- (A)  $\theta_m = \arcsin\left(\frac{1}{n_o}\sqrt{n_f^2 - n_r^2}\right)$
- (B)  $\theta_m = \arcsin\left(\frac{n_f^2}{n_o^2} - \frac{n_f^4}{n_o^2 n_r^2}\right)$
- (C)  $\theta_m = \arccos\left(\frac{1}{n_o}\sqrt{n_f^2 - n_r^2}\right)$
- (D)  $\theta_m = \arcsin\left(\frac{n_f}{n_r}\right)$
- (E)  $\theta_m = \arccos\left(\frac{n_r}{n_f}\right)$

### Solução:

Para guiar por reflexões internas totais, o raio dentro do núcleo deve atingir a interface núcleo-revestimento com um ângulo de incidência igual ao mínimo permitido (ângulo crítico)  $\theta_c$  com  $\sin \theta_c = \frac{n_r}{n_f}$ . Em termos do ângulo  $\theta'$  que o raio faz com o eixo da fibra, a condição limite é  $\theta'_{\max} = 90^\circ - \theta_c$ , portanto

$$\sin \theta'_{\max} = \cos \theta_c = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_r}{n_f}\right)^2} = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_r^2}}{n_f}.$$

Na face de entrada, pela lei de Snell  $n_o \sin \theta_m = n_f \sin \theta'$ . Substituindo  $\sin \theta' = \sin \theta'_{\max}$  obtém-se

$$\sin \theta_m = \frac{n_f}{n_o} \cdot \frac{\sqrt{n_f^2 - n_r^2}}{n_f} = \frac{1}{n_o} \sqrt{n_f^2 - n_r^2},$$

logo

$$\theta_m = \arcsin\left(\frac{1}{n_o}\sqrt{n_f^2 - n_r^2}\right).$$

A resposta correta é alternativa **(A)**.

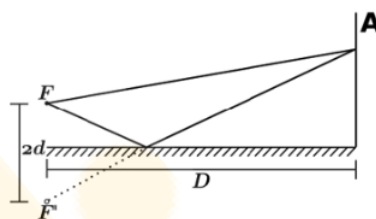
## 6.2 Questão 57 - Interferência da Luz

No trabalho intitulado “Uso do espelho de Lloyd como método de ensino de óptica no Ensino Médio” (Revista Brasileira de Ensino de Física, 2012), os autores propõem uma abordagem para o ensino de óptica, com ênfase na aplicação de conceitos básicos sobre o fenômeno da interferência da luz. Foi utilizado o experimento denominado “espelho de Lloyd”, que oferece uma ligação mais simples entre a óptica geométrica e a óptica física, sendo muito mais acessível do que a experiência das duas fendas de Young, segundo os autores. No procedimento, um padrão de franjas de interferência é observado usando-se luz emitida por uma fonte coerente, como um laser, e a luz refletida por uma placa de vidro (figura a). O padrão de interferência é projetado em um anteparo. As distâncias entre a fonte luminosa em relação ao plano da placa de vidro e o anteparo são, respectivamente,  $d = 1,0 \text{ mm}$  e  $D = 2,0 \text{ m}$  (figura b). Durante a realização do experimento, foi registrado um padrão de interferência (figura c) com 14 franjas por centímetro.

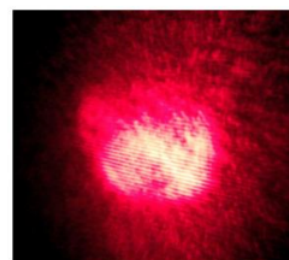
Qual é o valor do comprimento de onda  $\lambda$  da luz que foi medido, levando em consideração as informações fornecidas?



(a) Montagem experimental do espelho de Lloyd.



(b) Esquema do espelho de Lloyd.



(c) Aspecto geral das franjas de interferência observadas.

Fonte: Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 4, 4.310 (2012).

- (A) 660 nm.
- (B) 680 nm.
- (C) 710 nm.
- (D) 750 nm.

(E) 780 nm.

### Solução:

No arranjo de Lloyd, a franja de interferência observada no anteparo é similar à obtida por duas fontes separadas por  $2d$  (a fonte real e a imagem especular). Para pequenas inclinações (parâmetro de aproximação de Gauss) a separação entre franjas sucessivas (franja brilhante para a próxima franja brilhante) é dada por

$$\beta = \frac{\lambda D}{2d}.$$

Da observação temos 14 franjas por centímetro, portanto a distância entre franjas é

$$\beta = \frac{1 \text{ cm}}{14} = \frac{0,01 \text{ m}}{14} = 7,142857 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Isolando  $\lambda$  na expressão para  $\beta$ :

$$\lambda = \frac{2d\beta}{D}.$$

Substituindo os valores numéricos ( $d = 1,0 \text{ mm} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $D = 2,0 \text{ m}$ ):

$$\lambda = \frac{2(1,0 \times 10^{-3})(7,142857 \times 10^{-4})}{2,0} = 1,0 \times 10^{-3} \times 7,142857 \times 10^{-4} = 7,142857 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Em unidades nanométricas:

$$\lambda \approx 7,14 \times 10^{-7} \text{ m} = 714 \text{ nm}.$$

Comparando com as alternativas apresentadas, o valor mais próximo é **710 nm** (alternativa **(C)**).

A resposta correta é alternativa **(C) 710 nm**.

## 7 Relatividade

### 7.1 Questão 56 - Transformação de Lorentz

Seja  $R$  um referencial inercial e  $R'$  um referencial inercial que se move em relação a  $R$ , com velocidade constante  $\vec{v} = \beta c \hat{x}$ , na qual  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $|\beta| < 1$  é

um parâmetro adimensional. Os eixos  $x, y, z$  de  $R$  são paralelos aos eixos  $x', y', z'$  de  $R'$ , e as coordenadas espaço-tempo estão relacionadas entre si através da transformação de Lorentz. Sabe-se também que as origens  $O$  e  $O'$  dos referenciais  $R$  e  $R'$  são coincidentes nos instantes  $t = t' = 0$ . Considere as funções de onda  $\Psi_{\pm}(x, t) = \Psi_0 \exp[ik\phi_{\pm}(x, t)]$ , onde  $k$  é o vetor de onda e os comprimentos  $\phi_{\pm}$  são  $\phi_+(x, t) = x + ct$  e  $\phi_-(x, t) = x - ct$ . É correto afirmar que no referencial  $R'$  as grandezas  $\phi'_+$  e  $\phi'_-$  estão relacionadas através da seguinte forma, respectivamente:

$$(A) \quad \phi'_+ = \phi_+(1 + \beta) \quad \text{e} \quad \phi'_- = \phi_-(1 - \beta)$$

$$(B) \quad \phi'_+ = \phi_+(1 - \beta) \quad \text{e} \quad \phi'_- = \phi_-(1 + \beta)$$

$$(C) \quad \phi'_+ = \phi_+ \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad \text{e} \quad \phi'_- = \phi_- \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

$$(D) \quad \phi'_+ = \phi_+ \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \text{e} \quad \phi'_- = \phi_- \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

$$(E) \quad \phi'_+ = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(\phi_+ - \beta\phi_-) \quad \text{e} \quad \phi'_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(\phi_- + \beta\phi_+)$$

### Solução:

Usando as transformações de Lorentz,

$$\begin{aligned} \phi'_+ &= x' + ct' = \gamma(x - \beta ct) + c\gamma \left( t - \beta \frac{x}{c} \right) \\ &= \gamma[(1 - \beta)x + (1 - \beta)ct] = \gamma(1 - \beta)(x + ct) = \gamma(1 - \beta)\phi_+. \end{aligned}$$

Analogamente,

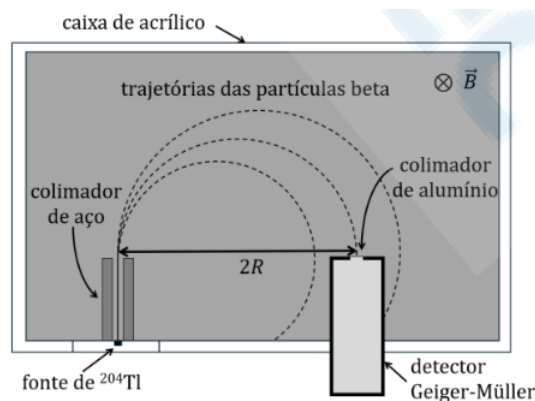
$$\begin{aligned} \phi'_- &= x' - ct' = \gamma(x - \beta ct) - c\gamma \left( t - \beta \frac{x}{c} \right) \\ &= \gamma[(1 + \beta)x - (1 + \beta)ct] = \gamma(1 + \beta)(x - ct) = \gamma(1 + \beta)\phi_-. \end{aligned}$$

Como  $\gamma(1 - \beta) = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$  e  $\gamma(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$ , obtemos exatamente a alternativa (C).

A resposta correta é alternativa **(C)**.

## 7.2 Questão 58 - Energia-Momento Relativística

Um experimento simplificado para verificar a relação energia-momento relativística de partículas beta emitidas por uma fonte radioativa foi proposto recentemente por D. Jackson *et al.* no *American Journal of Physics*, 92, 775 (2024). No aparato experimental, as partículas beta, de massa de repouso  $m_0$  e carga elétrica  $q$ , são emitidas por uma fonte de  $^{204}\text{Tl}$  (tálio-204) e, em seguida, passam por um colimador de aço que direciona suas trajetórias. Após saírem do colimador, as partículas beta seguem trajetórias (aproximadamente) circulares devido a um campo magnético uniforme de intensidade  $B$ . Um colimador de alumínio conduz as partículas para um detector Geiger-Müller, que registra a chegada das partículas, permitindo a medição do raio  $R$  de suas trajetórias. Seja  $K$  a energia cinética de uma partícula beta incidente na região do campo magnético e, considerando efeitos relativísticos, determine o raio  $R$  dessas trajetórias é dado pela expressão:



- (A)  $R = \sqrt{\frac{2m_0K}{(q^2B^2)}}$
- (B)  $R = \sqrt{\frac{m_0K}{(2q^2B^2)}}$
- (C)  $R = \sqrt{\frac{K(2m_0c^2 - K)}{(qBc)^2}}$
- (D)  $R = \sqrt{\frac{K(2m_0c^2 + K)}{(qBc)^2}}$
- (E)  $R = \sqrt{\frac{2K(m_0c^2 + K)}{(qBc)^2}}$



**Solução:**

A força magnética fornece a força centrípeta responsável pela trajetória circular:

$$qvB = \frac{pv}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{p}{qB}},$$

onde  $p$  é o momento relativístico da partícula.

Relatividade especial: a energia total é

$$E = \gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2,$$

e a relação energia-momento é

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2.$$

Isolando  $p$  obtemos

$$(pc)^2 = E^2 - (m_0 c^2)^2 = (K + m_0 c^2)^2 - (m_0 c^2)^2 = K^2 + 2K m_0 c^2.$$

Portanto

$$p = \frac{\sqrt{K^2 + 2K m_0 c^2}}{c} = \frac{\sqrt{K (K + 2m_0 c^2)}}{c}.$$

Substituindo em  $R = p/(qB)$ :

$$R = \frac{1}{qB} \frac{\sqrt{K^2 + 2K m_0 c^2}}{c} = \frac{\sqrt{K (K + 2m_0 c^2)}}{qBc}.$$

Escrevendo em forma equivalente (colocando o denominador  $(qBc)^2$  sob o radical):

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{K (2m_0 c^2 + K)}{(qBc)^2}}}.$$

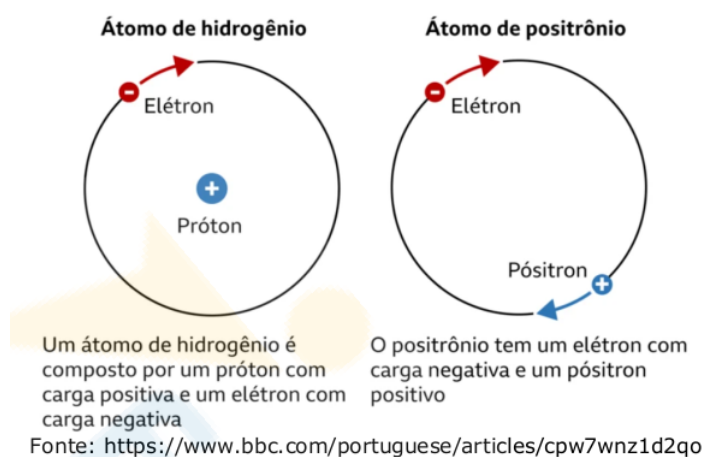
Assim, a alternativa que coincide com a expressão correta é a **(D)**.

A resposta correta é alternativa **(D)**.

## 8 Mecânica quântica em três dimensões e átomo de Hidrogênio

### 8.1 Questão 59 - Modelo de Bohr para positrônio

Recentemente, uma equipe de pesquisadores do CERN alcançou um avanço importante ao aplicar uma técnica inovadora de resfriamento a laser em uma amostra de positrônio, uma partícula composta por um elétron (carga elétrica  $-e$  e massa  $m$ ) e um pósitron (antipartícula com carga positiva e massa semelhante à do elétron). Essa conquista permite uma investigação mais precisa das propriedades do positrônio, abrindo possibilidades para estudos fundamentais, como a produção de condensados Bose-Einstein de antimatéria e a geração de luz gama coerente, o que poderia trazer um leque de novas aplicações.



Considerando o modelo de Bohr para átomos hidrogenoides, é correto afirmar que os níveis de energia de um positrônio, em função do número quântico principal  $n$ , são dados por:

- (A)  $E_n = -3,4/n^2$  eV
- (B)  $E_n = -6,8/n^2$  eV
- (C)  $E_n = -13,6/n^2$  eV
- (D)  $E_n = -27,2/n^2$  eV
- (E)  $E_n = -25,0/n^2$  MeV

**Solução:**

No modelo de Bohr para um sistema de duas partículas (átomo hidrogenoide) as energias estão dadas por

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2},$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida do sistema. Para o hidrogênio (núcleo com massa muito maior que  $m$ ) tem-se  $\mu \approx m_e$  e portanto

$$E_n^H = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}.$$

No caso do positrônio, o sistema é formado por um elétron e um pósitron com a mesma massa  $m_e$ , então a massa reduzida é

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2}.$$

Substituindo na expressão para  $E_n$  obtemos

$$E_n^{\text{Ps}} = -\frac{(m_e/2)e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{13,6}{n^2} \text{ eV}.$$

Logo

$$E_n^{\text{Ps}} = -\frac{6,8}{n^2} \text{ eV}.$$

Portanto, a alternativa correta é a (B).

A resposta correta é alternativa (B)  $E_n = -6,8/n^2 \text{ eV}$ .

## 8.2 Questão 60 - Átomo de Hidrogênio

O estado de um elétron em um átomo de hidrogênio, na representação posição  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ , é descrito pela função de onda normalizada a seguir:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^5}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right),$$

onde  $a_0$  é o raio de Bohr,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  são números reais que satisfazem  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . O estado  $\psi(\vec{r})$  é uma superposição das autofunções  $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$  do átomo de hidrogênio, para  $n = 2$ .

A tabela apresenta as autofunções normalizadas do átomo de hidrogênio em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  para os orbitais com  $n = 2$ :

Estado $(n, l, m)$	Função de onda
$(2, 0, 0)$	$\psi_{200}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
$(2, 1, 0)$	$\psi_{210}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \frac{r}{2a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta$
$(2, 1, \pm 1)$	$\psi_{21\pm 1}(r, \theta, \phi) = \pm \frac{1}{\sqrt{16\pi a_0^3}} \left(\frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\phi}$

Seja  $\hbar = h/2\pi$ . Assinale a alternativa correta que representa a probabilidade de uma medida de  $\hat{L}_z$  resultar  $+\hbar$ .

(A)  $P(L_z = +\hbar) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$

(B)  $P(L_z = +\hbar) = \alpha^2 + \beta^2$

(C)  $P(L_z = +\hbar) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)$

(D)  $P(L_z = +\hbar) = \alpha^2 - \beta^2$

(E)  $P(L_z = +\hbar) = \gamma^2$

### Solução:

A função de onda dada pode ser reescrita em coordenadas esféricas. Usando:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

obtemos

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{r}{\sqrt{32\pi a_0^5}} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) [\alpha \sin \theta \cos \phi + \beta \sin \theta \sin \phi + \gamma \cos \theta].$$

Comparando com as autofunções da tabela, vemos que:

$$\psi_{210}(r, \theta, \phi) \propto \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta,$$

$$\psi_{21\pm 1}(r, \theta, \phi) \propto \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\phi}.$$

Podemos escrever:

$$\alpha \sin \theta \cos \phi + \beta \sin \theta \sin \phi = \frac{\alpha - i\beta}{2} \sin \theta e^{i\phi} + \frac{\alpha + i\beta}{2} \sin \theta e^{-i\phi}.$$

Assim, o estado é uma combinação linear:

$$\psi \sim \gamma\psi_{210} + \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}}\psi_{21,1} + \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{2}}\psi_{21,-1}.$$

Portanto, o coeficiente da autofunção  $\psi_{21,1}$  (que corresponde a  $m = +1$ , logo  $L_z = +\hbar$ ) é

$$c_{+1} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}}.$$

A probabilidade é

$$P(L_z = +\hbar) = |c_{+1}|^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

Logo, a alternativa correta é a **(A)**.

A resposta correta é alternativa **(A)**  $P(L_z = +\hbar) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ .

**Problema.** Um pêndulo de massa  $m_2$  e comprimento  $L$  é solto do repouso na posição  $A$ , que faz um ângulo  $\theta$  com a vertical. A corda passa por uma roldana ideal e traciona um bloco de massa  $m_1$  sobre uma mesa horizontal. Ao o pêndulo atingir o ponto mais baixo  $B$ , qual deve ser o menor coeficiente de atrito estático  $\mu_s$  entre  $m_1$  e a mesa para que  $m_1$  não deslize?

**Solução.**

1) *Velocidade do pêndulo em B.* Pela conservação de energia entre  $A$  e  $B$ :

$$m_2 g L (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2 g L (1 - \cos \theta).$$

2) *Tração na corda em B.* No ponto mais baixo, as forças radiais no pêndulo dão

$$T_B - m_2 g = m_2 \frac{v_B^2}{L} \Rightarrow T_B = m_2 \left( g + \frac{v_B^2}{L} \right) = m_2 g [1 + 2(1 - \cos \theta)] = m_2 g (3 - 2 \cos \theta).$$

Como a roldana é ideal, a tração que puxa  $m_1$  na horizontal é  $T_B$ .

3) *Condição de não deslizamento de  $m_1$ .* Para  $m_1$  permanecer em repouso, a força de atrito estático máxima deve ser ao menos igual à tração:

$$f_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \geq T_B.$$

Logo, o coeficiente mínimo é

$$\boxed{\mu_{s,\min} = \frac{T_B}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1} (3 - 2 \cos \theta)}.$$

**Observação:** O ponto  $B$  é o ponto mais baixo da trajetória, onde a tração é máxima; portanto, se  $m_1$  não desliza em  $B$ , não deslizará em nenhuma outra posição.